1　質量モーメントの有用性について

今回の授業で，重心の定義と共に現れたナゾの概念である**質量モーメント**は，いろいろな場面で活躍する有用な「武器」だ。
しかしそうは言っても，高校物理では通常習わない概念であるから，「どーせ試験には出ないんでしょ？」などと一蹴したくなる人もいるだろう。

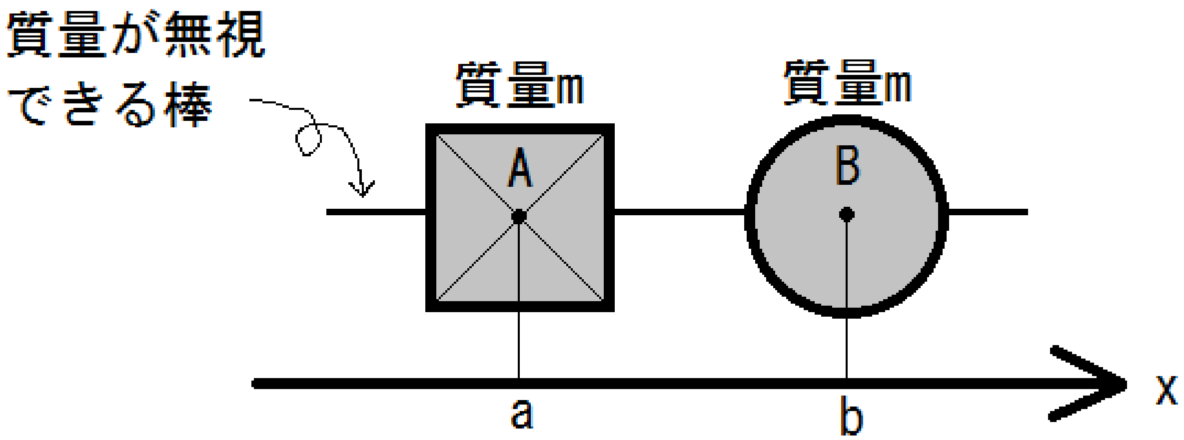
そもそも，物体を細かく区切って，各々の質量と位置座標の積を１つ１つ足し算して……なんて作業を実行するのはあまりに大変であり，馬鹿らしい。
微分積分を習った人なら，「これは積分を使って計算するんだな」という考えに至るかもしれない。実際，その通りである。
だが，高校物理の試験で微分積分を使わなければ解けないような問題が出題されることはない。「ほら，やっぱり試験に出ないんじゃないか」と言いたくなるであろう。

しかし，ちょっと待ってほしい。実は，質量モーメントは試験においても大変役に立つ概念だ。というか，重心を求めるちょっと応用的な問題になると，原理的には質量モーメントを考えずには解けないことが多い。
実際には何だかんだで解けてしまうこともあるが，いかんせん質量モーメントを使わない重心の定義は体系的でないため，応用問題はフィーリングで解かざるを得ないことになる。
これはどんな問題が出題されるか分からない受験生としては，大きな不安要素であろう。

先ほど述べたように，ある物体の質量モーメントを計算するのは，一般には難しい。しかし，以下に示すような「特殊なケース」においては，簡単な計算から物体の質量モーメントを求め，重心位置をはじき出すことができる。
質量モーメントは，重心概念の体系的理解に重要なだけでなく，**試験問題を解く際の有用性も無視できないほど大きい**のだ。

2　例題

問. 下図に示す物体の，重心位置の x 座標 x_G を求めよ（物体の密度は一様であるとする）。



◇解答を見る前に，自分で 30 分ほど考えてみてほしい。

解.[*1]

授業で説明したとおり，重心位置 x_G は物体の質量モーメントを全質量で割ったものである。そこで，この物体全体の質量モーメントを求めることが問題となる。

頭の回転の速い人はここでいきなり計算を始めようとするであろうが，まずは焦らず定義に戻って考えよう。

質量モーメントを求めるにはとりあえず，物体全体を非常に小さな「細胞」に分割する。そして各「細胞」の，質量と x 座標の積をつくり，それを全「細胞」に渡って足し上げるのだった。授業で使った記号を使うなら，

$$m_1x_1 + m_2x_2 \cdots + m_nx_n \tag{1}$$

となる。

ここで問題の図を振り返ると，今考えている「細胞」には，「物体 A（四角いやつ）に属する細胞」と「B（丸いやつ）に属する細胞」の二種類があることに気が付く。例えば，「A に属する細胞」には番号 $1, 2, \cdots, k$ が割り振られ，「B に属する細胞」には番号 $k+1, k+2, \cdots, n$ が割り振られているとしよう。

すると式 (1) の和は，「A から来た項の和」と「B から来た項の和」に分けられる：

$$\underbrace{m_1x_1 + m_2x_2 \cdots + m_kx_k}_{A\text{ から来た}} + \underbrace{m_{k+1}x_{k+1} + m_{k+2}x_{k+2} + \cdots + m_nx_n}_{B\text{ から来た}}. \tag{2}$$

言い換えればこれは，物体 A の質量モーメントと B の質量モーメントの和である。すなわち

$$(\text{全体の質量モーメント}) = (A\text{ の質量モーメント}) + (B\text{ の質量モーメント}). \tag{3}$$

一般に，**いくつかの部分から成る物体の質量モーメントは，各部分の質量モーメントの和**になる。これを質量モーメントの**加法性**という。

[*1] 考え方の上で質量モーメントが本質的に重要であることを強調するため，解説が少し冗長になった。勿論，試験の回答ではここまで細かく記述する必要はない。

式 (3) により，我々は A の質量モーメントと B の質量モーメントをそれぞれ求めて足せばよいことが分かった。

では，それらの質量モーメントはどうやって求められるだろう。それには，重心の定義を逆に使えばよい。つまり，

$$(\text{重心位置}) = (\text{質量モーメント})/(\text{全質量}) \tag{4}$$

を逆に解いて

$$(\text{質量モーメント}) = (\text{全質量}) \times (\text{重心位置}) \tag{5}$$

とするのだ。今幸いにして我々は，物体 A,B 両方の重心位置を知っている。長方形の重心は対角線の交点だし，円の重心はその中心である。このように，**既に重心位置が分かっている物体を複数組み合わせた物体の重心位置はいつでも，質量モーメントの加法性 (3) を用いて求められる**のだ。

式 (5) および図から，

$$(A\ \text{の質量モーメント}) = ma \tag{6}$$

$$(B\ \text{の質量モーメント}) = mb \tag{7}$$

となることが分かる。よって (3) より，

$$(\text{全体の質量モーメント}) = m(a+b). \tag{8}$$

全体の質量は $2m$ だから，重心位置は

$$x_G = \frac{a+b}{2} \tag{9}$$

と求まる。（終）

今回はあえて簡単な例を取り上げたので，「こんな面倒なことしなくても……」と思われたかもしれない。しかし，問題が複雑になればなるほど，上のような体系的な考え方が必要になってくる。

例えば上の考え方を応用すれば，穴の開いた円盤の重心位置なども簡単に求められるようになるのだ。